ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGÔ KHẮC KIÊN

VẬN DỤNG CHUỖI ĐIỀU HÒA VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGÔ KHẮC KIÊN

VẬN DỤNG CHUỖI ĐIỀU HÒA VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Mở đầu

Trong sách toán Trung học cơ sở, Trung học phổ thông đã có những bài toán về chuỗi số điều hòa. Nhưng số lượng rất ít không đủ cho học sinh luyện tập, hơn nữa việc phân dạng bài tập chưa đầy đủ và không có tính hệ thống. Để cung cấp cho học sinh về nội dung kiến thức, phương pháp giải toán. Để phục vụ cho công tác đào tạo đội tuyển học sinh giỏi một cách bài bản hơn về chuỗi số điều hòa. Tôi xin trình bày một cách hệ thống khái niệm và các tính chất của chuỗi điều hòa. Từ đó đưa ra một số ví dụ minh họa việc vận dụng chuỗi điều hòa vào giải một số bài toán dành cho học sinh giỏi, theo các dạng bài tập sau:

- Các bài toán liên quan đến bất đẳng thức;
- Các bài toán liên quan đến tính chất số học của chuỗi điều hòa;
- Các bài toán liên quan đến tổng của chuỗi điều hòa;
- Một số bài toán khác liên quan đến chuỗi điều hòa;
- Một số bài toán dành cho học sinh giỏi.

Với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tổng hợp kiến thức về chuỗi điều hòa, giúp cung cấp thêm một phương pháp hay và rất bổ ích để rèn luyện nội dung này, chúng tôi chọn chủ đề "**Vận dụng chuỗi điều hòa vào giải một số bài toán dành cho học sinh giỏi**" để làm đề tài luận văn cao học.

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này, chúng tôi trình bày định nghĩa, ví dụ và các kiến thức cơ bản, nâng cao về chuỗi số và chuỗi điều hòa.

Chương 2. Vận dụng chuỗi điều hòa vào giải toán. Chương 2 trình bày sự vận dụng của chuỗi điều hòa vào việc chứng minh bất đẳng thức, các tính chất số học của số hạng, tổng của chuỗi điều hòa. Cuối Chương này chúng tôi sưu tầm, chọn lọc để đưa ra một số bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi có liên quan đến chuỗi điều hòa.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái

Nguyên. Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TS. Trịnh Thanh Hải. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân và các đồng nghiệp trong thời gian làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2018

Người viết luận văn

Ngô Khắc Kiên

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Chuỗi số

1.1.1 Khái niệm chuỗi số

Định nghĩa 1.1.1. Cho dãy số vô hạn $u_1; u_2; \ldots; u_n; \ldots$, khi đó gọi tổng vô hạn $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ là *chuỗi số* và ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$; u_n là *số hạng tổng quát*; $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ là *tổng riêng* thứ n của chuỗi; $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ gọi là *phần dư* thứ n. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (hữu hạn) thì chuỗi được gọi là *hội tụ* và s là *tổng của chuỗi*. Nếu dãy s_n không dần tới một giá trị hữu hạn thì chuỗi đó là *phân kỳ*.

Ví dụ 1.1.2.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} u_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

là tổng riêng thứ n và

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Suy ra chuỗi đã cho là hội tụ và có tổng bằng 1.

1.1.2 Các tính chất của chuỗi số

Định lý 1.1.3.

i. Tính hội tụ hay phân kỳ của 1 chuỗi số sẽ không đổi khi ta bỏ đi một số hữu hạn số hạng đầu của chuỗi số.

ii. Tính hội tụ hay phân kỳ của 1 chuỗi số sẽ không đổi nếu ta bỏ đi hay thêm vào một số hữu hạn số hạng ở những vị trí bất kỳ.

Định lý 1.1.4. *Nếu chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *hội tụ và có tổng bằng* s *thì chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ *cũng hội tụ và có tổng bằng* as*.Còn nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *phân kỳ thì với* $a \neq 0$ *chuỗi số* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$ *cũng phân kỳ.*

Định lý 1.1.5. *Nếu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *là các chuỗi số hội tụ thì các chuỗi tổng và chuỗi hiệu sau đây* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$ *cũng hội tụ. Hơn nữa,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Định lý 1.1.6. (Định lý về tiêu chuẩn so sánh) *Cho 2 chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *nếu* $u_n \leq v_n$ *với mọi* $n \geq n_0 (n_0 \in N)$ *thì từ sự hội tụ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *suy ra sự hội tụ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và từ sự phân kỳ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *suy ra sự phân kỳ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$*.*

Định lý 1.1.7. (Định lý về tiêu chuẩn tương đương) *Cho hai chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$*. Xét* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = k$*. Nếu* $0 < k < +\infty$ *thì hai chuỗi đã cho sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ (hai chuỗi tương đương nhau).*

Nếu $k = 0$ *thì từ sự hội tụ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *suy ra sự hội tụ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*.*

Nếu $k = +\infty$ *thì từ sự phân kỳ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$*, ta suy ra sự phân kỳ của* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*.*

Định lý 1.1.8. (Định lý về tiêu chuẩn Đalambe) *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = D$*. Nếu:*

$D < 1$*: chuỗi hội tụ;*

$D > 1$*: chuỗi phân kỳ;*

$D = 1$*: phải xét thêm bằng phương pháp khác.*

Định lý 1.1.9. (Định lý về tiêu chuẩn Côsi) *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$*. Nếu:*

$C < 1$*: chuỗi hội tụ;*

$C > 1$*: chuỗi số Phân kỳ;*

$C = 1$*: phải xét thêm bằng phương pháp khác.*

Định lý 1.1.10. (Định lý về tiêu chuẩn tích phân) *Cho chuỗi số dương* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, nếu tồn tại hàm* $f(x)$ *sao cho* $u_n = f(n)$ *với* $\forall n \geq n_0$ *và* $f(x)$ *liên tục, đơn điệu giảm trên miền* $(n_0; +\infty)$ *thì* $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

Định lý 1.1.11. (Định lý về chuỗi số đan dấu) *Tiêu chuẩn Lepnit: Cho chuỗi số đan dấu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$*, nếu tồn tại dãy số* u_n *đơn điệu giảm (nghĩa là* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$*) và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *thì chuỗi đan dấu hội tụ và tổng của chuỗi không vượt quá giá trị tuyệt đối của số hạng đầu tiên.*

1.2 Chuỗi điều hòa

1.2.1 Khái niệm chuỗi điều hòa

Định nghĩa 1.2.1. Chuỗi số có dạng :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+d} + \frac{1}{m+2d} + \ldots,$$

trong đó m, d là các số sao cho mẫu số khác không, được gọi là chuỗi điều hòa.

Ví dụ 1.2.2.

(i) Chuỗi số có tổng riêng là $H(1, n) = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$,

(ii) Chuỗi số có tổng riêng là $H(m, n) = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m+1} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, là các chuỗi điều hòa. Ta luôn giả thiết rằng $1 \leq m < n$.

1.2.2 Một số tính chất của chuỗi điều hòa

Tính chất 1.2.3. *$H(1,n)$ là vô hạn, tức là* $\lim\limits_{n\to\infty} H(1,n) = +\infty$.

Chứng minh. Xét dãy con $\left\{H(1,2^k)\right\}_{k=0}^{\infty}$, khi đó,

$$
\begin{aligned}
H(1,1) &= 1 = 1 + 0\left(\frac{1}{2}\right);\\
H(1,2) &= 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1\left(\frac{1}{2}\right);\\
H(1,4) &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right);\\
H(1,8) &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) = 1 + 3\left(\frac{1}{2}\right);
\end{aligned}
$$

Tổng quát, $H(1,2^k) \geq 1 + k\left(\frac{1}{2}\right)$. Do dãy con $\left\{H(1,2^k)\right\}_{k=0}^{\infty}$ không bị chặn nên dãy $\{H(1,n)\}_{k=0}^{\infty}$ phân kỳ hay $\lim\limits_{n\to\infty} H(1,n) = +\infty$. Lý luận tương tự ta cũng có thể chỉ ra với số nguyên dương tùy ý M thì

$$H(1,M^k) \geq 1 + k\left(\frac{M-1}{M}\right), k = 0,1,2,\ldots$$

□

Tính chất 1.2.4. *$H(m,n)$ không phải là một số nguyên.*

Chứng minh. (i) Đối với trường hợp đặc biệt $H(1,n)$, $m = 1$, cho s sao cho: $2^s \leq n < 2^{s+1}$. Chúng ta nhân $H(1,n)$ với $2^{s-1}Q$, trong đó Q là tích của tất cả số nguyên lẻ trong đoạn $[1,n]$. Tất cả các số hạng trong $H(1,n)$ sẽ là số nguyên ngoại trừ số hạng thứ 2^s sẽ trở thành số nguyên chia cho 2. Điều này chỉ ra rằng $H(1,n)$ không phải là một số nguyên.

(ii) Cách khác, đối với trường hợp $m = 1$, cho p là số nguyên tố lớn nhất không vượt quá n. Theo tiên đề Betrand, có 1 số nguyên tố q với $p < q < 2p$. Do đó, chúng ta có $n < 2p$. Nếu $H(1,n)$ là một số nguyên, thì: $n!H(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}$ là một số nguyên chia hết cho p. Tuy nhiên, số hạng $\frac{n!}{p}$ trong tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}$ không chia hết cho p, còn tất cả số hạng khác sẽ chia hết cho p.

(iii) Trường hợp: $m > 1$. Giả sử $2^a|k$ nhưng 2^{a+1} không là ước của k (viết là $2a||K$), thì chúng ta gọi a là *thứ tự chẵn lẻ* của k. Bây giờ quan sát các số

$2^a, 3.2^a, 5.2^a, \ldots$, tất cả các số này cùng thứ tự chẵn lẻ. Giữa những số này có $2.2^a, 4.2^a, 6.2^a, \ldots$, tất cả đều có thứ tự chẵn lẻ lớn hơn. Do vậy, giữa 2 số bất kỳ cùng thứ tự chẵn lẻ, có 1 số với thứ tự chẵn lẻ lớn hơn. Điều này chỉ ra duy nhất rằng trong các số $m, m+1, \ldots, n$ có 1 số nguyên có thứ tự chẵn lẻ lớn nhất, là q có thứ tự chẵn lẻ là u. Bây giờ ta lấy $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ nhân với $2^u L$, trong đó L là tích của tất cả số nguyên lẻ trong $[m, n]$. Khi đó: $2^u LH(m,n)$ là một số lẻ. Do đó:

$$H(m,n) = \frac{2r+1}{2^u L} = \frac{q}{p},$$

trong đó, p chẵn, q lẻ và vì vậy $H(m,n)$ không phải là số nguyên.

□

Ví dụ 1.2.5. Ta có

$$H(1,10) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520}$$

không phải là một số nguyên.

Tính chất 1.2.6. *Nếu $H(m,n) = \frac{q}{p}$ và $m+n$ là một số nguyên tố lẻ, thì $(m+n)|q$.*

Chứng minh. Chú ý rằng $H(m,n)$ có một số chẵn số hạng và nó bằng với

$$\sum_{j=0}^{\frac{n-m-1}{2}} \left(\frac{1}{m+j} + \frac{1}{n-j}\right) = \sum_{j=0}^{\frac{n-m-1}{2}} \frac{m+n}{(m+j)(n-j)} = (m+n)\frac{s}{r},$$

trong đó, $\gcd(s,r) = 1$. Do $m+n$ là số nguyên tố nên $\gcd(r, m+n) = 1$. Nên ta có

$$\frac{q}{p} = \frac{(m+n)s}{r} \Rightarrow rq = p(m+n)s \Rightarrow (m+n)|rq \Rightarrow (m+n)|q.$$

□

Ví dụ 1.2.7. *Ta có*

$$H(1,10) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{10} = \frac{7381}{2520}$$

và $m+n = 11,\ 11|7381 = q$.